ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HƯỜNG

MỘT SỐ DẠNG TOÁN CỰC TRỊ TRONG LỚP HÀM MŨ VÀ HÀM HYPERBOLIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HƯỜNG

MỘT SỐ DẠNG TOÁN CỰC TRỊ TRONG LỚP HÀM MŨ VÀ HÀM HYPERBOLIC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 84 60 113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU ii

1 Một số kiến thức liên quan đến các hàm mũ và hyperbolic 1
- 1.1 Tính chất cơ bản của các hàm mũ và hyperbolic 1
  - 1.1.1 Tính chất cơ bản của hàm mũ 1
  - 1.1.2 Tính chất cơ bản của hàm hyperbolic 2
- 1.2 Đẳng thức sinh bởi hàm mũ và hàm hyperbolic 5
- 1.3 Một số bất đẳng thức chứa đạo hàm và tích phân quan trọng 10

2 Bất đẳng thức và cực trị trong lớp hàm mũ và hàm hyperbolic 27
- 2.1 Bất đẳng thức trong lớp hàm mũ và hàm hyperbolic 27
- 2.2 Các dạng toán cực trị sinh bởi hàm mũ và hyperbolic 47

3 Một số dạng toán liên quan 59
- 3.1 Các phương trình đại số giải bằng phương pháp hàm hyperbolic . . 59
- 3.2 Khảo sát một số lớp phương trình chứa hàm mũ và hàm hyperbolic . 67

KẾT LUẬN 74

TÀI LIỆU THAM KHẢO 75

MỞ ĐẦU

Chuyên đề về các hàm siêu việt (hàm mũ và logarit) được đề cập ở lớp 12 bậc trung học phổ thông. Vì vậy các ứng dụng của hàm mũ và logarit không được đề cập trong các lớp 10 và 11. Đặc biệt, do giảm tải chương trình, lớp các hàm hyperbobic cũng không được đưa vào SGK. Các hàm này chỉ được khảo sát trong chương trình bồi dưỡng HSG ở các lớp chuyên Toán phục vụ các kỳ thi HSG quốc gia, Olympic khu vực và quốc tế.

Trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp bậc THPT và Olympic khu vực và quốc tế, các bài toán liên quan tới hàm mũ và hàm hyperbolic thường xuyên được đề cập. Những dạng toán này thường được xem là thuộc loại khó vì phần kiến thức sâu sắc về hàm mũ và hàm hyperbolic không nằm trong chương trình chính thức của giáo trình Đại số và Giải tích bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề hàm mũ và hàm hyperbolic, tôi chọn đề tài luận văn "Một số dạng toán cực trị trong lớp hàm mũ và hàm hyperbolic".

Luận văn nhằm tổng hợp một số tính chất của hàm mũ và hàm hyperbolic và mối quan hệ giữa chúng. Tiếp theo, xét các bài toán cực trị, khảo sát một số lớp phương trình, bất phương trình cùng một số dạng toán đại số có sử dụng tính chất hàm mũ, hàm ngược của nó là hàm logarit và hàm hyperbolic.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Một số kiến thức liên quan đến các hàm mũ và hyperbolic.

Chương 2. Bất đẳng thức và cực trị trong lớp hàm mũ và hàm hyperbolic.

Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

Luận văn sử dụng một số dạng toán và bài tập từ các tài liệu [1]-[9] và một số

đề thi Olympic liên quan đến hàm hàm mũ và hàm hyperbolic trong những năm gần đây.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán và các thầy cô trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả hoàn thành bản luận này.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu và các đồng nghiệp trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, huyện Vĩnh Bảo, thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Thái Nguyên,   ngày 20 tháng 5 năm 2018

Tác giả luận văn

Trần Thị Hường

Chương 1

Một số kiến thức liên quan đến các hàm mũ và hyperbolic

1.1 Tính chất cơ bản của các hàm mũ và hyperbolic

1.1.1 Tính chất cơ bản của hàm mũ

Xét hàm số mũ dạng $f(x) = a^x$ với $0 < a \neq 1$.

* Tập xác định: $D_f = \mathbb{R}$.

* Tập giá trị: $I_f = \mathbb{R}^+$.

* Tính đơn điệu: Hàm số $f(x) = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$.

Nhận xét 1.1. Đồ thị hàm số mũ có tiệm cận ngang là trục Ox về phía $-\infty$ khi $a > 1$ và tiệm cận ngang là trục Ox về phía $+\infty$ khi $0 < a < 1$.

Tiếp theo, ta xét một số đẳng thức trong lớp hàm mũ.

Tính chất 1.1 (Công thức tính đạo hàm)**.**

$$(e^x)' = e^x;\;\; (e^u)' = u'e^u,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;\;\; (a^u)' = u'a^u \ln a.$$

Tính chất 1.2 (Đồng nhất thức trong lớp hàm mũ)**.** Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó:

a) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
b) Giả sử $b > 0$. Khi đó $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.
c) $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) > 0$.
d) Giả sử $b > 0$. Khi đó $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - \log_a b) > 0$.

1.1.2 Tính chất cơ bản của hàm hyperbolic

Trong phần này, ta trình bày một số tính chất của các hàm mũ đặc biệt, đó là các hàm hyperbolic sinh bởi $e^{\pm x}$.

Tính chất 1.3 (Hàm sin hyperbolic)**.** Hàm sin hyperbolic

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và

$$\sinh x \geq 0,\ \ \forall x \geq 0,\ \ \sinh x < 0,\ \ \forall x < 0.$$

$$(\sinh x)' = \cosh x; (\sinh u)' = u' \cosh u.$$

Ta có $(\sinh x)' = \cosh x \geq 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $\sinh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do $(\sinh x)'' = \sinh x$ nên hàm số $\sinh x$ lồi trên $(0; +\infty)$ và lõm trên $(-\infty; 0)$.

Tính chất 1.4 (Hàm cosin hyperbolic)**.** Hàm cosin hyperbolic

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Ta có $(\cosh x)' = \sinh x; (\cosh u)' = u' \sinh u$ và $(\cosh x)' = \sinh x$ nên hàm số $\cosh x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Do $(\cosh x)'' = \cosh x \geq 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\cosh x$ lồi trên $\mathbb{R}$.

Tính chất 1.5 (Hàm tang hyperbolic)**.** Hàm tang hyperbolic

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}; (\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^2 u}.$$

Do

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

nên hàm số $\tanh x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tính chất 1.6 (Hàm cotang hyperbolic)**.** Hàm cotang

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}; (\coth u)' = \frac{-u'}{\sinh^2 u}$$

và $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} < 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên hàm số $\coth x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Tính chất 1.7 (Công thức khai triển tổng và hiệu)**.**

$$\cosh(x+y) = \cosh x.\cosh y + \sinh x.\sinh y, \tag{1.1}$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x.\cosh y - \sinh x.\sinh y, \tag{1.2}$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x.\sinh y, \tag{1.3}$$

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x.\sinh y, \tag{1.4}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y}, \tag{1.5}$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1-\tanh x \tanh y}. \tag{1.6}$$

Chứng minh. Ta có

$$\cosh x.\cosh y + \sinh x.\sinh y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \cosh(x+y).$$

Từ đó, suy ra (1.1).

Tiếp theo, trong công thức (1.1) thay y bằng $-y$, ta thu được

$$\cosh(x-y) = \cosh x.\cosh(-y) + \sinh x.\sinh(-y)$$

$$= \cosh x.\cosh y - \sinh x.\sinh y.$$

Ta nhận được (1.2).

Các công thức còn lại (1.3)-(1.6) được chứng minh tương tự.

Từ công thức cộng ta cũng dễ dàng chứng minh được các công thức nhân sau đây.

Tính chất 1.8 (Công thức khai triển góc nhân hai và nhân ba)**.**

$$\sinh(2x) = 2\sinh x.\cosh x,$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x,$$

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x},$$

$$\sinh(3x) = 4\sinh^3 x + 3\sinh x,$$

$$\cosh(3x) = 4\cosh^3 x - 3\cosh x.$$

Tính chất 1.9 (Công thức biến đổi tích thành tổng)**.**

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y &= \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right],\\
\sinh x \sinh y &= \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right],\\
\sinh x \cosh y &= \frac{1}{2}\left[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right].
\end{aligned}$$

Tính chất 1.10 (Công thức biến đổi tổng thành tích)**.**

$$\begin{aligned}
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2},\\
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},\\
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2},\\
\tanh x + \tanh y &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh x.\cosh y},\\
\tanh x \tanh y &= \frac{\sinh(x-y)}{\cosh x.\cosh y}.
\end{aligned}$$

1.2 Đẳng thức sinh bởi hàm mũ và hàm hyperbolic

Trong phần này ta xét một số dạng toán áp dụng các tính chất của hàm mũ và các hàm hyperbolic.

Bài toán 1.1. Tính giá trị các hàm hyperbolic tại điểm ln 2 và ln 3.

Lời giải. Theo định nghĩa, ta có

$$\sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{3}{4}$$